Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

на тему **«Достатня умова локалізації розв'язку змішаної задачі для параболічних рівнянь»**

Виконав: студент групи МП41 IV курсу,
спеціальності 113
Прикладна математика
Шевчук Д.Р.

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук
доцент кафедри
прикладної математики
Стєпанова К.В.

Рецензент: доктор техн. наук
професор кафедри
прикладної математики
Ромашов Ю.В.

Харків — 2023 рік

Анотації

Шевчук Д.Р. Достатня умова локалізації розв'язку змішаної задачі для параболічних рівнянь.

У даній кваліфікаційній роботі проводиться доведення достатньої умови локалізації розв'язку змішаної задачі для широкого класу параболічних рівнянь (Теорема (4.1)). Для доведення цього факту використовуються відомі нерівності та властивості функцій, що задовольняють системі диференційних нерівностей (4.2) - (4.3).

Shevchuk D.R. A sufficient condition for localization of a solution to a mixed problem for parabolic equations.

In this qualification work we prove a sufficient condition for localization of the solution of a mixed problem for a wide class of parabolic equations (Theorem (4.1)). To prove this fact we use the known inequalities and properties of functions satisfying the system of differential inequalities (4.2) - (4.3).

Зміст

Вступ

Рівняння в частинних похідних мають величезне значення в багатьох галузях науки, таких як фізика, інженерія, економіка тощо. Одним із важливих класів таких рівнянь є параболічні рівняння, які широко застосовуються для моделювання фізичних явищ, таких як теплопровідність, дифузія, динаміка рідин та багатьох інших процесів.

Метою даної кваліфікаційної роботи є доведення достатньої умови локалізації розв'язку змішаної задачі для широкого класу нелінійних параболічних рівнянь (Теорема (4.1)). Ефект локалізації представляє собою досить цікаву задачу в теорії рівнянь у частинних похідних і має застосування в різних галузях науки та навіть техніки.

Поставлена мета буде досягнута за допомогою підхода, який жодним чином не пов'язаний з бар'єрною технікою та який дозволяє розглянути більш широкий клас квазілінійних параболічних рівнянь у багатовимірних областях.

Все почалося з дослідження початково-крайової задачі для модельного рівняння нелінійної теплопровідності:

$$u_t = (u^m)_{xx} \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times (0, \infty), \quad m > 1, \quad T < \infty;$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \forall x \in [0, \infty),$$

$$u(t, 0) = f(t) \quad \forall t \in [0, T),$$

$$f(t) \to \infty \quad \text{при} \quad t \to T.$$

Остання умова визначає граничний режим із загостренням (тут час загострення T).

З [1] відомо, що у разі обмеженості u_0 зазначена задача має єдиний узагальнений розв'язок $u(t, x)$. Цей розв'язок є неперервною функцією [2], [3], причому якщо u_0 має компактний носій, то для всіх $t \in [0, T)$ носій $u(t, \cdot)$ є компактним (це доведено у роботах Г. І. Баренблатта, М. І. Вішика та М. К. Ліхта) і можна визначити рухому границю (або, як ще кажуть, термальний фронт у роботі Зельдовича Я. Б. та Компанійця О. С.):

$$\zeta(t) = \sup\{x \in [0, \infty) : u(t, x) > 0\} \quad \forall t \in [0, T).$$

Ця функція є неперервною і монотонно зростаючою [4].

Усі відомі результати щодо граничних режимів з загостренням були отримані за допомогою методу, який заснований на створенні функцій-бар'єрів. Ці техніки обмежують розв'язання задачі всередині певної області, та вони здебільшого пов'язані з різними явними автомодельними розв'язками. Однак цей підхід не можна застосовувати до рівнянь, які не допускають відповідних теорем порівняння.

В рамках цієї роботи буде розглядатися набагато складніша задача Коші-Діріхле, для якої була доведена точна достатня умова локалізації розв'язку. Доведення ефекту локалізації поставленої задачі для широкого класу параболічних рівнянь засноване на спеціальних інтегральних апріорних оцінках, які об'єднують ідеї [5] - [8]. Отриманий результат та спосіб доведення можуть стати основою для подальших досліджень і призвести до нових наукових результатів із подальшим застосуванням в різних галузях.

Розділ 1. Постановка задачі

В області $Q = (0,T) \times \Omega, \Omega = \Omega_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < |x| < R\}, n \geq 1$, $0 < T < \infty, R < \infty$, розглядається наступна задача Коші-Діріхле:

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{q-1} u) - \sum_{i=1}^{n} D_{x_i} a_i(t,x,u,D_x u) = 0, \quad q > 0; \tag{1.1}$$

$$u|_{\Gamma(1)} = \tilde{f}(t,x), \quad u|_{\Gamma(R)} = 0; \tag{1.2}$$

$$u(0,x) = u_0 \in L_{q+1}(\Omega); \tag{1.3}$$

$$\operatorname{supp} u_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < d\}, \quad 1 < d < R. \tag{1.4}$$

$\Gamma(s) \equiv (0,T) \times \partial B(s), B(s) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < s\}$, каратеодорієві функції a_i задовільняють наступним умовам коерцитивності та зросту:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x,s,\xi)\xi_i \geq d_0 \, |\xi|^{p+1} \quad \forall (t,x,s,\xi) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n, \quad d_0 > 0; \tag{1.5}$$

$$|a_i(t,x,s,\xi)| \leq d_1 \, |\xi|^p \quad \forall (t,x,s,\xi) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n, \ d_1 < \infty, \ i = \overline{1,n}. \tag{1.6}$$

Сформулюємо додаткові обмеження на структуру рівняння (1.1):

1. Функції $a_i, i = 1, \ldots, n$, є неперервними за всіма своїми аргументами і задовольняють наступній умові монотонності:
$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i(t,x,s,\xi) - a_i(t,x,s,\eta)\right)(\xi_i - \eta_i) \geqslant \delta |\xi - \eta|^{p+1}, \quad \delta > 0$$
2. Функції $u_0(x)$ і $\tilde{f}(t,x)$ задовольняють наступну умову узгодження:
$$f(0,x) - u_0(x) \in W^1_{p+1}(\Omega, \partial\Omega)$$

3. Функції $a_i, i = 1, \ldots, n$, не залежать від (t, x) і

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i(s,\xi) - a_i(v,\xi)|^{\frac{p+1}{p}} \leqslant c\left(1 + |s|^{q+1} + |v|^{q+1} + |\xi|^{p+1}\right)|s-v| \quad \forall s, v \in \mathbb{R}^1.$$

Простим прикладом для більш наглядного та зрозумілого аналога поставленої задачі (1.1)-(1.3) може виступати наступна модель:

$$u_t = (u^m)_{xx} \quad \forall (t,x) \in (0,T) \times (0,\infty), \quad m > 1, \quad T < \infty; \tag{1.7}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x \in [0,\infty), \tag{1.8}$$

$$u(t,0) = f(t) \quad \forall t \in [0,T), \tag{1.9}$$

$$f(t) \to \infty \quad \text{при} \quad t \to T, \tag{1.10}$$

де u_0 та f є заданими невід'ємними неперервними функціями, що задовільняють наступній умові: $u_0(0) = f(0)$.

Задача (1.7) - (1.10) описує зміну температури в матеріалі або середовищі з плином часу t, з огляду на нелінійні та вироджувальні ефекти. Умови (1.8) та (1.9) задають початковий і граничний розподіл температури відповідно, а умова (1.10) вказує на те, що зовнішні умови, які визначаються цією функцією, наближаються до нескінченності в міру наближення часу до граничного значення T. Це може бути пов'язано з різними фізичними явищами, такими як, наприклад, інтенсивне нагрівання або зміна зовнішніх чинників, які призводять до необмеженого зростання впливу на матеріал або середовище в кінцевий момент часу.

Розділ 2. Основні означення

У цьому пункті розглянемо важливі та необхідні основні означення, які активно використовуються протягом роботи.

2.1. Означення енергетичного узагальненого розв'язку

Означення 2.1. Функція $u(t,x)$ є *енергетичним узагальненим розв'язком* задачі (1.1)-(1.3), якщо для будь-якого $T_0 < T$ виконується наступна інтегральна тотожність:

$$\int_0^{T_0} \langle (|u|^{q-1}u)'_t, \eta \rangle dt + \int_0^{T_0} \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,D_x u)\eta_{x_i} dxdt = 0,$$

де $\eta(t,x)$ - довільна функція із $L_{p+1}(0,T_0; W^1_{p+1}(\Omega, \delta\Omega))$,

$a_i(t,x,u(t,x),D_x u(t,x)) \in L_{\frac{p+1}{p}}((0,T_0)\times\Omega), \quad i = 1,...,n,$

та виконуються наступні умови, що забезпечують збіжність інтегралів:

i) $u - f \in L_{p+1}(0,T_0; W^1_{p+1}(\Omega,\delta\Omega)) \cap L_\infty(0); T_0; L_{q+1}(\Omega))$;

ii) $(|u|^{q-1})'_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0,T_0;(W^1_{p+1}(\Omega,\delta\Omega))*)$ і виконана початкова умова (1.3) у сенсі

$$\int\limits_0^{T_0} \langle (|u|^{q-1}u)'_t, \xi \rangle dt + \int\limits_0^{T_0} \int\limits_\Omega (|u|^{q-1}u - |u_0|^{q-1}u_0)\xi'_t dxdt = 0$$

для довільної пробної функції $\xi(t,x) \in L_{p+1}(0,T_0; W^1_{p+1}(\Omega,\delta\Omega)) \cap$ $\cap W^1_1(0,T_0; L_\infty(\Omega))$, яка обертається в нуль в околі $t = T_0$;

Через $W_1^1(\Omega, S)$ позначаємо замикання в нормі $W_r^1(\Omega)$ множини функцій із $C^\infty(\Omega)$, які обертаються в нуль в околі $S \subset \delta\Omega, W_r^1(\Omega) \equiv W_r^1(\Omega, \varnothing)$.

За виконання умов 1), 2), як випливає з [9], за будь-якого $j \in \mathbb{N}$ існує принаймні один енергетичний розв'язок $u_j(t,x)$ задачі (1.1)-(1.3) в області $Q_j = (0, T_j) \times \Omega$ у сенсі визначення (1.1). Тобто існують функції $u_j(t,x)$, які задовольняють умовам означення 2.1 з визначення (1.1) з T_j замість T_0.

Нехай виконані всі додаткові припущення 1) - 3) . З [10] випливає, що зазначені розв'язки $u_j(t,x)$ є єдиними розв'язками нашої задачі (1.1)-(1.3) в областях Q_j. Отже,

$$u_j(t,x) = u_i(t,x) \text{ для майже всіх } (t,x) \in Q_i, \ \forall j, i \in \mathbb{N}, \ j > i.$$

Це означає, що послідовність $\{u_j\}$ визначає єдину функцію $u(t,x)$ в області Q, яка є розв'язком задачі (1.1)-(1.3) у сенсі визначення (1.1).

2.2. Означення носія розв'язку

Означення 2.2. Нехай $u(t,x)$ - розв'язок диференціального рівняння на області $\mathbb{R}^n$, тобто $u(t,x)$ задовольняє диференціальне рівняння разом з початковими або краєвими умовами.

Носієм розв'язку $u(t,x)$ є замикання множини $\operatorname{supp} u(t,\cdot)$, тобто

$$\operatorname{supp} u(t,\cdot) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : u(t,x) \neq 0\}}.$$

2.3. Означення властивості локалізації

Означення 2.3. Задача (1.1)-(1.3) має властивість *локалізації*, якщо будь-який її енергетичний розв'язок $u(t,x)$ має наступну властивість:

$$\zeta(t) \equiv \inf\{r : \operatorname{supp} u(t,\cdot) \subset B(r)\} < R \quad \forall t < T.$$

Розділ 3. Допоміжні леми та теореми

Наступні факти є важливими складовими для доведення основного результату цієї роботи. Лема 3.1 була доведена у публікації [11], а факт, на який я буду спиратися та який тут носить назву Теорема 3.2, доводиться у кваліфікаційній роботі Голенкової Катерини.

3.1. Лема 3.1

Лема 3.1. *Для майже всіх $a, b, 0 \le a < b < T$ має місце наступна глобальна апріорна оцінка довільного енергетичного розв'язку $u(t,x)$ задачі (1.1) - (1.3):*

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(b,x)|^{q+1}dx + \int_a^b \int_\Omega |D_x u|^{p+1}\,dxdt \\ \leqslant c_1 \int_\Omega |u(a,x)|^{q+1}dx + c_2 \left(1+\zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right) F_1(a,b),\end{aligned} \tag{3.1}$$

$\zeta_1(s) = \sup\limits_{0\le\tau<s} \zeta(\tau), \quad \zeta(\tau) < R \quad \forall t < T;$

$$F_1(a,b) \equiv \int_\Omega |f(b,x)|^{q+1}dx + \int_a^b \int_\Omega |D_x f|^{p+1}\,dxdt + \\ + \left(\int_a^b \|f'_t\|_{L_{q+1}(\Omega)}\,dt\right)^{q+1} + \int_a^b \|f'_t\|^{p_1}_{L_{p_1}(\Omega)}\,dt;$$

$F_1(0,b) \equiv F(b); \quad p_1 = \dfrac{p+1}{p-q+1}.$

3.2. Теорема 3.2

Теорема 3.2. *Нехай деяке сімейство неперервно диференційованих невід'ємних незростаючих на інтервалі* $[0, \infty)$ *функцій* $\{U_i(s)\},\ i = \overline{1, j}$, $j \le \infty$, *задовільняє наступній системі диференційних нерівностей:*

$$U_i(s) \le \lambda U_{i-1}(s) + k\left(-U_i'(s)\right)^{1+\gamma} \quad \forall s \in (0, \infty),\ 0 < \lambda < 1,\ U_0(s) \equiv 0, \tag{3.2}$$

$$U_i(0) \le K_i < \infty \quad \forall i \le j, \quad k = \mathrm{const} < \infty, \quad \gamma = \mathrm{const} > 0, \tag{3.3}$$

де $\{K_i\}$ *- неспадна послідовність додатних чисел. Тоді для вказаних функцій* $U_i(s)$ *є справедливими наступні апріорні оцінки:*

$$U_i(s) \le M_i(s) \equiv a_1 k^{-\frac{1}{\gamma}}[a_2(kK_i^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}} - s]_+^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \quad \forall i \le j, \quad \forall s > 0, \tag{3.4}$$

де

$$a_1 = (1-\lambda)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}},\ a_2 = (1+\gamma)\gamma^{-1}(1-\lambda)^{-\frac{1}{1+\gamma}},\ f(s)_+ \equiv \max(0, f(s)).$$

Зокрема справедливі наступні оцінки для носіїв усіх функцій $U_i(s)$:

$$\operatorname{supp} U_i \in [0, b_i], \quad b_i = a_2(kK_i^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}}. \tag{3.5}$$

Розділ 4. Основний результат: достатня умова локалізації розв'язку

4.1. Достатня умова локалізації розв'язку

Основний результат моєї роботи полягає у наступній теоремі.

Теорема 4.1. *Нехай* $0 < q < p$ *та виконані структурні умови*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x,s,\xi)\xi_i \geqslant d_0|\xi|^{p+1} \quad \forall (t,x,s,\xi) \in \bar{Q} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n, \quad d_0 > 0;$$

$$|a_i(t,x,s,\xi)| \leqslant d_1|\xi|^p \quad \forall (t,x,s,\xi) \in \bar{Q} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n, d_1 < \infty, i = 1,2,\ldots,n$$

та умова на початкову функцію u_0*:*

$$\operatorname{supp} u_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < d\}, \quad 1 < d < R.$$

Нехай граничний режим такий, що

$$F(t) \leqslant \omega(T-t)^{-\alpha_1} \quad \forall t < T, \quad \alpha_1 = \frac{q+1}{p-q}, \quad \omega = \mathrm{const} < \infty. \tag{4.1}$$

Тоді існують такі постійні $R_0 = R_0(d, d_0, d_1, q, p, \|u_0\|_{L_{q+1}(\Omega)}) < \infty$ *та* $K = K(R) > 0$*, що задача (1.1) - (1.4) має властивість локалізації, як тільки* $R > R_0,\ \omega < K$*.*

4.2. Доведення основної теореми

Доведення теореми (4.1) проводиться на основі вивчення властивостей функцій, що задовільняють нескінченній диференціальній системі

$$E_j(s) \leqslant r_1 h_{j-1}(s) + r_2 \Delta_j^{\nu}(-\frac{dE_j(s)}{ds})^{1+\mu} \quad \forall s > 1, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{4.2}$$

$$h_j(s) \leqslant (1+\delta_j) h_{j-1}(s) + r_3 \delta_j^{-\frac{(p+1)\nu}{q+1}} \Delta_j^{\nu}(-\frac{dE_j(s)}{ds})^{1+\mu} \tag{4.3}$$

$$\forall s > 1, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \forall \delta_j > 0,$$

де константи $r_1, r_2, r_3 < \infty$ залежать лише від відомих параметрів,

$$\nu = \frac{(1-\theta)(q+1)}{q(p+1)+\theta(p-q)} < 1, \quad \mu = \frac{(1-\theta)(p-q)}{q(p+1)+\theta(p-q)},$$

$$\theta = \frac{n(p-q)+q+1}{n(p-q)+(q+1)(p+1)}.$$

Спочатку деталізуємо вибір послідовності $\{t_j\}$. Зафіксуємо два числа

$$0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$$

і вибір точок послідовності $\{t_j\}$ зумовимо лише одним обмеженням:

$$\xi_1 < \frac{\Delta_i + 1}{\Delta_i} < \xi_2 \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

При цьому будуть виконуватися наступні співвідношення:

$$\frac{\xi_1}{1-\xi_1}\Delta_j \leqslant T - t_j \equiv \sum_{i=j+1}^{\infty} \Delta_i \leqslant \frac{\xi_2}{1-\xi_2}\Delta_j \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Тепер введемо нормовані функції:

$$A_j(s) = \Delta_j^{\frac{q+1}{p-q}} E_j(s), \quad H_j(s) \equiv \Delta_j^{\frac{q+1}{p-q}} h_j(s), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

При цьому співвідношення (4.2), (4.3) еквівалентні співвідношенням:

$$A_j(s) \leqslant r_4 H_{j-1}(s) + r_2(-A_j'(s))^{1+\mu} \quad \forall s > 1, \quad r_4 = r_1 \xi_2^{\frac{q+1}{p-q}}, \tag{4.6}$$

$$H_j(s) \leqslant (1+\delta_j)\xi_2^{\frac{q+1}{p-q}} H_{j-1}(s) + r_3' \delta_j^{-\frac{(p+1)\nu}{q+1}} (-A_j'(s))^{1+\mu} \quad \forall s > 1, j \in \mathbb{N}, \tag{4.7}$$

де $H_0(s) \equiv T^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s)$.

Зафіксуємо деяке $\lambda, 1 > \lambda > \xi_2^{\frac{q+1}{p-q}}$, та оберемо параметр δ_j так, що $(1+\delta_j)\xi_2^{\frac{q+1}{p-q}} = \lambda \Longrightarrow \delta_j = \delta_0 \equiv \lambda \xi_2^{-\frac{q+1}{p-q}} - 1$.

Співвідношення (4.7) набуде вигляду:

$$H_j(s) \leqslant \lambda H_{j-1}(s) + r_3(-A'_j(s))^{1+\mu}, \quad r_3 = r'_3(\delta_0)\delta_0^{-\frac{(p+1)v}{q+1}}. \tag{4.8}$$

Тепер почнемо ітерувати співвідношення (4.6), оцінюючи при цьому усі $H_i(s)$ за допомогою співвідношення (4.8).

Отримаємо:

$$\begin{aligned}
A_j(s) \leqslant & r_4 H_{j-1}(s) + r_2 \left(-A'_j(s)\right)^{1+\mu} \\
\leqslant & r_4 \lambda H_{j-2}(s) + r_4 r_3 \left(-A'_{j-1}(s)\right)^{1+\mu} + r_2 \left(-A'_j(s)\right)^{1+\mu} \\
\leqslant & r_4 \lambda^2 H_{j-3}(s) + r_4 r_3 \lambda \left(-A'_{j-2}(s)\right)^{1+\mu} \\
& + r_4 r_3 \left(-A'_{j-1}(s)\right)^{1+\mu} + r_2 \left(-A'_j(s)\right)^{1+\mu} \\
\leqslant & \cdots \leqslant r_4 \lambda^{j-1} H_0(s) + r_4 r_3 \Big[\lambda^{j-2} \left(-A'_1(s)\right)^{1+\mu} + \lambda^{j-3} \left(-A'_2(s)\right)^{1+\mu} \\
& + \cdots + \lambda^2 \left(-A'_{j-3}(s)\right)^{1+\mu} + \lambda \left(-A'_{j-2}(s)\right)^{1+\mu} \\
& + \left(-A'_{j-1}(s)\right)^{1+\mu} + \frac{r_2}{r_3 r_4} \left(-A'_j(s)\right)^{1+\mu}\Big] \\
\leqslant & r_4 \lambda^{j-1} H_0(s) + r_5 \sum_{i=1}^{j} \left(-\lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} A'_j(s)\right)^{1+\mu},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

де $r_5 = \dfrac{r_3 r_4}{\lambda} \max\left(1, \dfrac{\lambda r_2}{r_3 r_4}\right)$.

З нерівності (4.9) отримуємо:

$$A_j(s) \leqslant r_4 \lambda^{j-1} T^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s) + r_5 [\sum_{i=1}^{j} (-\lambda^{\frac{j-1}{1+\mu}} A'_i(s))]^{1+\mu} \tag{4.10}$$

Введемо ще одне сімейство невід'ємних функцій:

$$U_j(s) \equiv \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} A_i(s), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Очевидною є наступна рівність: $U_j(s) - \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} U_{j-1}(s) = A_j(s), \quad U_0(s) = 0,$ тому співвідношення (4.10) може бути переписано у вигляді:

$$U_j(s) \leqslant \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} U_{j-1}(s) + r_4 \lambda^{j-1} T^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s) + r_5(-U_j'(s_j))^{1+\mu} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (4.11)$$

$$U_j(1) = \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} A_i(1) = \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} \Delta_i^{\frac{q+1}{p-q}} E_i(1) \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Для оцінки зверху $E_j(1)$ скористаємося нерівністю з леми (3.1). В силу (4.5) отримуємо:

$$F_1(1, t_j) \equiv F(t_j) \leqslant \omega (T - t_j)^{-\alpha_1} \leqslant \omega \left(\frac{1 - \xi_1}{\xi_1} \right)^{\alpha_1} \Delta_j^{-\frac{q+1}{p-q}},$$

Зі співвідношення (3.1) при $a = 0, b = t_j$ маємо:

$$\int_\Omega |u(b,x)|^{q+1} dx + \int_a^b \int_\Omega |D_x u|^{p+1} \, dx dt$$
$$\leqslant c_1 \int_\Omega |u(a,x)|^{q+1} dx + c_2 \left(1 + \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right) F_1(a,b) =$$
$$\int_\Omega |u(b,x)|^{q+1} dx + E_j(1)$$
$$\leqslant c_1 h_0(1) + c_2 \left(1 + \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right) F_1(t_j) \leqslant$$
$$\int_\Omega |u(b,x)|^{q+1} dx + E_j(1)$$
$$\leqslant c_1 h_0(1) + c_2 \left(1 + \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right) \omega (T - t_j)^{-\alpha_1} \leqslant$$
$$\int_\Omega |u(b,x)|^{q+1} dx + E_j(1)$$
$$\leqslant c_1 h_0(1) + c_2 \left(1 + \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right) \omega \left(\frac{1 - \xi_1}{\xi_1} \right)^{\alpha_1} \Delta_j^{-\frac{q+1}{p-q}}$$

Отже,

$$E_j(1) \leqslant c_1 h_0(1) + c_3 \omega \left(1 + \zeta_1(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right) \Delta_j^{-\frac{q+1}{p-q}}, \quad c_3 = c_2 \left(\frac{1 - \xi_1}{\xi_1} \right)^{\frac{q+1}{p-q}}$$

$$U_j(1) \leqslant c_1 g_j T^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(1) + c_3 \omega \left(1 - \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} \right)^{-1} \left(1 + \zeta_1(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right),$$

де

$$g_j \equiv \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} 2^{-\frac{i(q+1)}{p-q}} \leqslant \lambda^{\frac{j}{1+\mu}} \left(\lambda^{\frac{1}{1+\mu}} 2^{\frac{q+1}{p-q}} - 1\right)^{-1} \text{якщо } \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} 2^{\frac{q+1}{p-q}} > 1,$$
$$g_j \leqslant j 2^{-\frac{j(q+1)}{p-q}}, \quad \text{якщо } \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} 2^{\frac{q+1}{p-q}} = 1,$$
$$g_j \leqslant 2^{-\frac{j(q+1)}{p-q}} \left(1 - \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} 2^{\frac{q+1}{p-q}}\right), \quad \text{якщо } \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} 2^{\frac{1+q}{p-q}} < 1.$$

Так як $g_j \leqslant g_0 = \mathrm{const} < \infty$, де g_0 не залежить від $j \in \mathbb{N}$, то оцінку для $U_j(1)$ можна записати у вигляді:

$$U_j(1) \leqslant (c_4 + c_5 \omega) + c_5 \omega \zeta_1 (t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \tag{4.12}$$

де

$$c_4 = c_1 g_0 T^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(1), \quad c_5 = c_3 \left(1 - \lambda^{\frac{1}{1+\mu}}\right)^{-1}.$$

З нерівностей (4.11), (4.12) отримуємо наступну систему:

$$U_j(s) \leqslant \lambda_1 U_{j-1}(s) + r_5 \left(-U_j'(s)\right)^{1+\mu} \quad \forall s > d, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$
$$U_j(d) \leqslant (c_4 + c_5 \omega) + c_5 \omega \zeta_1 (t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \lambda_1 = \lambda^{\frac{1}{1+\mu}}.$$

З цієї системи в силу теореми (3.2) випливає наступна рівномірна оцінка носіїв функцій $U_j(s)$:

$$\zeta(t_j) \leqslant \sup\{s : s \in \operatorname{supp} U_j\} \leqslant c_6 \left[c_4 + c_5 \omega + c_5 \omega \zeta_1 (t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right]^{\frac{\mu}{1+\mu}} + d,$$

де $c_6 = \left(\dfrac{r_5}{1-\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1+\mu}} \cdot \dfrac{1+\mu}{\mu}$.
З останньої нерівності випливає

$$\zeta(t_j) \leqslant d + c_6 (c_4 + c_5 \omega)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_6 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}} \omega^{\frac{\mu}{1+\mu}} \zeta_1 (t_j)^{\varkappa} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \tag{4.13}$$

де

$$\varkappa = \frac{q(p+1)(p-q)}{(p-q+1)[n(p-q)+(q+1)(p+1)]} < 1 \quad \forall n \geqslant 1, \quad p > q.$$

Для доведення основної теореми (4.1) достатньо встановити оцінку зверху для функції $\zeta(t)$ на множині

$$S = \{t \in (0,T) : \zeta(t) = \zeta_1(t)\}. \tag{4.14}$$

Існує число $T_0 < T$, яке залежить лише від параметрів ξ_1, ξ_2 із (4.4), таке, що будь-яке число $\tilde{t} \in (T_0, T)$ може бути представлено у вигляді деякої точки з відповідної послідовності $\{t_j\}$, що задовольняє обмеженням (4.4), (4.5), причому $t_0 = 0$. Візьмемо тепер довільну точку $\tilde{t}$:

$$\tilde{t} \in [T_0, T) \cap S, \quad \tilde{t} = t_{j_0}, \quad j_0 \in \mathbb{N}.$$

З огляду на співвідношення (4.13) і визначення (4.14) маємо:

$$\begin{aligned}\zeta(\tilde{t}) = \zeta\left(t_{j_0}\right) &\leqslant d + c_6\left(c_4 + c_5\omega\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_6 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}} \zeta(\tilde{t})^{\varkappa} \omega^{\frac{\mu}{\mu+1}} \\ &\leqslant d + c_6\left(c_4 + c_5\omega\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + \varepsilon\zeta(\tilde{t}) + c_7(\varepsilon)\left(c_6 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right)^{\frac{1}{1-\varkappa}} \omega^{\frac{\mu}{(1+\mu)(1-\varkappa)}},\end{aligned}$$

Це у свою чергу приводить до оцінки

$$\zeta(\tilde{t}) \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}\left[d + c_6\left(c_4 + c_5\omega\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_7(\varepsilon)\left(c_6 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right)^{\frac{1}{1-\varkappa}} \omega^{\frac{\mu}{(1+\mu)(1-\varkappa)}}\right] \equiv D(\varepsilon, \omega)$$

$$D(\varepsilon, 0) = (1-\varepsilon)^{-1}\left(d + c_6 c_4^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right) = \frac{D_0}{1-\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{4.15}$$

Усі постійні c_i, які фігурували у вищенаведених обчисленнях, не залежать від зовнішнього радіуса R області Ω. Тому при виконанні умови

$$d + c_6 c_4^{\frac{\mu}{1+\mu}} < R \tag{4.16}$$

можна знайти $\varepsilon_0 > 0, \omega = \omega(R) > 0$ такі, що

$$\zeta(\tilde{t}) < D(\varepsilon, \omega) < R \quad \forall \tilde{t} \in [T_0, T)\,. \tag{4.17}$$

Ця оцінка є еквівалентною наявності властивості локалізації граничної задачі, що розглядається, при R і $\omega > 0$, які задовольняють співвідношенням (4.16), (4.17). Теорему (4.1) доведено.

Висновки

Мета даної кваліфікаційної роботи, яка полягала у доведенні достатньої умови локалізації розв'язку змішаної задачі для широкого класу параболічних рівнянь (Теорема (4.1)), була досягнута.

Для реалізації поставленої задачі був використаний енергетичний метод, який жодним чином не був пов'язаний з бар'єрною технікою, яка, у свою чергу, є досить відомою, але не може бути застосована для розв'язання нашої задачі для дуже широкого класу параболічних рівнянь. Тож доведення ефекту локалізації поставленої в роботі задачі засноване на спеціальних інтегральних апріорних оцінках, в основі яких лежать відомі результати [5] - [8].

Основний результат даної роботи має важливе значення в теорії рівнянь у частинних похідних і може бути застосований в різних галузях, таких як, наприклад, моделювання теплопровідності, дифузії та динаміки рідин. Результати, отримані в кваліфікаційній роботі, можуть бути використані в подальших дослідженнях у галузі параболічних рівнянь.

Список використаних джерел

[1] Oleĭnik O. A., Kalashnikov A. S., Zhou Yu-lin. The Cauchy problem and boundary problems for equations of the type of non-stationary filtration, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 1958. V. 22 P. 667-704.

[2] Aronson D. G. Regularity properties of flows through porous media, SIAM J. Appl. Math. 1969. V. 17. P. 461-467.

[3] Gilding B. H. Continuity of generalized solutions of the Cauchy problem for the porous medium equation, J. London Math. Soc. (2). 1976. V. 13. P. 103-106.

[4] Caffarelli L. A., Friedman A. Regularity of the free boundary for the one-dimensional flow of gas in a porous medium, Amer. J. Math. 1979. V. 101. P. 1193-1218.

[5] Antontsev, S. N. On the localization of solutions of nonlinear degenerate elliptic and parabolic equations, Sov. Math., Dokl. 1981. V. 24. P. 420-424.

[6] Diaz J. I., Veron L. Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations, Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 290. № 2. P. 787-814.

[7] Oleinik O. A., Iosif'yan G. A. An analogue of Saint-Venant's principle and the uniqueness of solutions of boundary value problems for parabolic equations in unbounded domains, Russian Math. Surveys. 1976. V. 31. № 6. P. 153–178.

[8] Akulov V. F., Shishkov A. E. On asymptotic properties of solutions of mixed problems for quasilinear parabolic equations in unbounded domains, Math. USSR-Sb. 1992. V. 72 № 2. P. 557–567.

[9] Alt H. W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations, Math. Z. 1983. V. 183. P. 311-341.

[10] Benilan Ph., Wittbold P. On mild and weak solutions of elliptic-parabolic problems, Adv. Differential Equations. 1996. V. 1. №6. P. 1053-1073.

[11] Shishkov A. E., Shchelkov A. G. Blow-up boundary regimes for general quasilinear parabolic equations in multidimensional domains, Sb. Math. 1999. V. 190. №3. P. 447–479.