Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

на тему **«Апріорні оцінки для сімейства невід'ємних неперервно диференційовних функцій, що не зростають на інтервалі і задовільняють системі диференціальних нерівностей »**

Виконала: студентка групи МП41 IV курсу, спеціальності 113 Прикладна математика
Голенкова К.О.

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук доцент кафедри прикладної математики
Стєпанова К.В.

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук доцент кафедри прикладної математики
Макаров О.А.

Харків — 2023 рік

Анотації

Голенкова К.О. Апріорні оцінки для сімейства невід'ємних неперервно диференційовних функцій, що не зростають на інтервалі, і задовільняють системі диференціальних нерівностей.

Досліджуються сімейства неперервно диференційовних функцій, які задовольняють системі диференціальних нерівностей. Основною метою дослідження є доведення існування апріорних оцінок для цих функцій. Теореми, отримані в роботі, мають важливе значення в математичних дослідженнях, зокрема в теорії диференціальних рівнянь. Дані оцінки можуть також знайти своє застосування у задачах математичної фізики та інших галузях, де виникають складні нелінійні диференціальні рівняння.

Holenkova K.O. A priori estimates for a family of nonnegative continuously differentiable non increasing on the interval functions which satisfy a system of differential inequalities.

Families of continuously differentiable functions that satisfy a system of differential inequalities are being studied. The main goal of the research is to prove the existence of a priori estimates for these functions. The theorems obtained in the work are of great importance in mathematical research, particularly in the theory of differential equations. These estimates can also be useful in problems of mathematical physics and other fields where complex nonlinear differential equations arise.

Зміст

Вступ

Системи диференціальних нерівностей, які задовольняють умові Коші, це системи диференціальних нерівностей, для яких відомі початкові умови на деякому проміжку часу. Це означає, що значення функції і її похідних визначені в початковий момент часу. Ці системи зазвичай використовуються для дослідження поведінки розв'язків систем диференціальних рівнянь. Вони можуть допомогти встановити границі змін змінних у розв'язках, що може бути корисним для розуміння того, як система рівнянь впливає на фізичний процес, який вона описує. Апріорні оцінки, зібрані в результаті дослідження таких систем нерівностей, можуть також допомогти з встановленням умов, за яких розв'язки систем рівнянь будуть збігатися до стаціонарних точок або до рівноважних станів.

Системи диференціальних нерівностей, які задовольняють умові Коші і для яких виконуються апріорні оцінки, є об'єктом дослідження теорії стабільності рішень диференціальних рівнянь. Однією з ключових лем цієї тематики є лемми типу Стампакья.

Леми Стампакья є важливими результатами в теорії диференціальних рівнянь та математичного аналізу, оскільки вони дають змогу отримати інформацію відносно розв'язків (апріорні оцінки для розв'язків) диференціальних рівнянь, що в свою чергу дозволяє зробити висновки про поведінку розв'язків без прямого знаходження розв'язкі (їх аналітичного вигляду).

Крім того, ці оцінки мають важливе значення в різних галузях, таких як фізика, інженерія та економіка. Вони можуть бути використані для побудови ефективних чисельних методів, що забезпечують точність і швидкість розв'язку задач. Крім того, леми Стампакья можуть бути використані для дослідження стійкості та збіжності різних чисельних методів, в теорії автоматичного керування, оптимізації та стійкості систем керування, а також в дослідженні стійкості розв'язків диференціальних рівнянь з запізненням, диференціальних інтервальних рівнянь, рівнянь у частинних похідних та інших областях математики та її застосувань.

Аналог леми Стампакья для сімейства невід'ємних неперервно диференційовних функцій, що не зростають на інтервалі і задовольняють системі диференціальних нерівностей, стверджує, що для кожної функції з цього сімейства існує апріорна оцінка вигляду $f(x) \leq Ce^{Ax}$, де A і C - сталі, що залежать лише від відомих параметрів заданої системи диференціальних нерівностей.

У роботі було розглянути сімейство неперервно диференційовних функцій, що не зростають на інтервалі, і задовільняють системі диференціальних нерівностей. **Метою** даної роботи є доведення апріорних оцінок для розв'язку нелінійних диференціальних нерівностей (Теорема 3.1 та Теорема 3.2).

Ці теореми посідають важливе місце в математичних дослідженнях, зокрема в теорії диференціальних рівнянь. Вони дозволяє отримати апріорні оцінки для функцій, які задовольняють певній системі диференційних нерівностей, що містять нелінійні диференціальні оператори. Це дає можливість краще розуміти поведінку таких функцій та аналізувати їх властивості безпосередньо з рівнянь. Отримані оцінки можуть знайти своє застосування у галузях науки, таких як математична фізика, де вирішення складних нелінійних диференціальних рівнянь є необхідним.

Зокрема ці теореми мають важливе значення при доведенні достатньої умови локалізації розв'язку змішаної задачі для широкого класу параболічних рівнянь. Доведення цього факту проводиться в кваліфікаційній роботі моєї колеги Шевчук Дарини.

Авторами статті "Blow-up boundary regimes for general quasilinear parabolic equations in multidimensional domains" (див. [1]) була розглянута початково-крайова задача теплопровідності з умовою на границі та була встановлена умова локалізації розв'язку. Було показано, що для всіх j існує принаймні один розв'язок задачі в обмеженій області, і вони є єдиними розв'язками в цих областях. З цього був зроблений висновок, що послідовність цих розв'язків визначає єдиний розв'язок задачі в цілій області.

Дана робота є продовженням дослідження А. Є. Шишкова, А. Г. Щелкова на прикладі більш ускладненої задачі.

Розділ 1. Постановка задачі

В області $Q = (0,T) \times \Omega,\ \Omega = \Omega_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < |x| < R\},\ n \leq 1,$ $0 < T < \infty$, розглядається наступна задача Коші-Діріхле:

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{q-1}u) \sum_{i=1}^{n} D_{x_i} a_i(t,x,u,D_x u) = 0, \quad q > 0; \tag{1.1}$$

$$u|_{\Gamma(1)} = \tilde{f}(t,x), \quad u|_{\Gamma(R)} = 0; \tag{1.2}$$

$$u(0,x) = u_0 \in L_{q+1}(\Omega); \tag{1.3}$$

$$supp\ u_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < d\}, 1 < d < R. \tag{1.4}$$

$\Gamma(s) \equiv (0,T) \times \partial B(s), B(s) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < s\}$, каратеодорієві функції a_i задовільняють наступним умовам коерцитивності та зросту:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x,s,\xi)\xi_i \geq d_0 |\xi|^{p+1}\ \ \forall (t,x,s,\xi) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n,\ d_0 > 0; \tag{1.5}$$

$$|a_i(t,x,s,\xi)| \leq d_1 |\xi|^p\ \ \forall (t,x,s,\xi) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n,\ d_1 < \infty, i = 1,2,...,n. \tag{1.6}$$

Виконана основна структурна умова:

$$0 < q < p \tag{1.7}$$

В даній задачі ми розглядаємо область $Q = (0,T) \times \Omega$, де Ω є кільцевою областю в n-вимірному просторі.

У рівнянні (1.1) ми маємо частинну похідну за часом t від виразу $|u|^{q-1}u$ помножену на суму частинних похідних за просторовими змінними x_i функції $a_i(t,x,u,D_x u)$. Тут q - додатне число. Таким чином рівняння (1.1) це нелінійне параболічне рівняння в частинних похідних.

Розглянемо детальніше умови задачі Коші-Діріхле.

Рівність (1.2) встановлює умови Діріхле для функції u на межі $\Gamma(1)$ та $\Gamma(R)$. На межі $\Gamma(1)$ задана функція $\tilde{f}(t,x)$, а на межі $\Gamma(R)$ функція u рівна нулю.

Початкова умова (1.3) визначає значення функції u при $t = 0$. Вона належить простору $L_{q+1}(\Omega)$.

Умова (1.4) обмежує область, в якій початкова функція u_0 має ненульовий носій(тобто область, де u_0 відмінне від нуля). Ця область обмежена радіусом d, де $1 < d < R$.

Умови (1.5) та (1.6) встановлюють властивості функцій $a_i(t,x,s,\xi)$, які задовольняють умови коерцитивності та зросту. Вони залежать від часу t, просторових змінних x, радіуса s та вектора ξ.

Основна структурна умова (1.7) вказує, що параметр q додатній та має бути меншим за p.

Розділ 2. Основні означення

Розглянемо необхідні нам основні означення.

2.1. Означення розв'язку

Означення 2.1. Функція $u(t,x)$ є енергетичним узагальненим розв'язком задачі (1.1)-(1.3), якщо для будь-якого $T_0 < T$:

1. $u - f \in L_{p+1}(0,T_0; W^1_{p+1}(\Omega, \delta\Omega)) \cap L_\infty(0); T_0; L_{q+1}(\Omega))$;

2. $(|u|^{q-1})'_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0,T_0; (W^1_{p+1}(\Omega,\delta\Omega))*)$ і виконана початкова умова (1.3) в сенсі

$$\int\limits_0^{T_0} \langle (|u|^{q-1}u)'_t, \xi\rangle dt + \int\limits_0^{T_0}\int\limits_\Omega (|u|^{q-1}u - |u_0|^{q-1}u_0)\xi'_t dxdt = 0$$

для довільної пробної функції $\xi(t,x) \in L_{p+1}(0,T_0; W^1_{p+1}(\Omega,\delta\Omega)) \cap W^1_1(0,T_0; L_\infty(\Omega))$, яка обертається в нуль в околі $t = T_0$;

3. $a_i(t,x,u(t,x), D_x u(t,x)) \in L_{\frac{p+1}{p}}((0,T_0)\times\Omega)$, $\quad i = 1,...,n$ і виконана інтегральна тотожність

$$\int\limits_0^{T_0} \langle (|u|^{q-1}u)'_t, \eta\rangle dt + \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,D_x u)\eta_{x_i} dxdt = 0,$$

де $\eta(t,x)$ - довільна функція із $L_{p+1}(0,T_0; W^1_{p+1}(\Omega,\delta\Omega))$.

Через $W^1_1(\Omega, S)$ обозначаємо замикання в нормі $W^1_r(\Omega)$ множини функцій із $C^\infty(\Omega)$, які обертаються в нуль в околі $S \subset \delta\Omega, W^1_r(\Omega) \equiv W^1_r(\Omega, \varnothing)$.

2.2. Означення носія розв'язку

Нехай $u(t,x)$ - розв'язок диференціального рівняння на області $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тобто $u(t,x)$ задовольняє диференціальне рівняння разом з початковими/краєвими умовами на області D.

Носієм розв'язку $u(t,x)$ є замикання множини $\operatorname{supp} u(t,\cdot)$ (множини точок $x \in \mathbb{R}^n$ для яких $u(t,x) \neq 0$), тобто

$$\operatorname{supp} u(t,\cdot) = \overline{\{x \in D : u(t,x) \neq 0\}}.$$

2.3. Означення властивості локалізації

Розв'язок із означення 2.1 має властивість кінцевості швидкості розповсюдження носія (див. [2]). Звідти в силу умови (1.4) випливає наступна властивість.

Означення 2.2. При будь-якому граничному режимі (тобто при зростанні функції $F(t)$ при $t \to T$) існує $T' = T'(F,R), \quad 0 < T' \leq T$ таке, що

$$\zeta(t) \equiv inf\{r : supp\ u(t,\cdot) \subset B(r)\} \quad \forall t < T'.$$

Означення 2.3. Вважатимемо, що задача (1.1)-(1.3) має властивість локалізації, якщо її будь-який енергетичний розв'язок $u(t,x)$ має наступну властивість:

$$\zeta(t) < R \quad \forall t < T$$

Розділ 3. Основні результати

Теорема 3.1. *Нехай деяке сімейство неперервно диференційованих незростаючих на інтервалі $[0,\infty)$ функцій $\{U_i(s)\}, i = 1,2,...,j, j \le \infty$ задовольняє наступній системі диференційних нерівностей:*

$$U_i(s) \le \lambda U_{i-1}(s) + k(-U_i'(s))^{1+\gamma} \; \forall s \in (0,\infty), \quad 0 < \lambda < 1, \quad U_0 \equiv 0, \tag{3.1}$$

$$U_i(s) \le K_i < \infty \quad \forall i \le j, \quad k = const < \infty, \quad \gamma = const > 0, \tag{3.2}$$

де K_i - неспадна послідовність додатних чисел. Тоді для заданих функцій $U_i(s)$ є справедливі наступні апріорні оцінки:

$$U_i(s) \le M_i(s) \equiv a_1 k^{-\frac{1}{\gamma}} \left[a_2 \left(kK_i^\gamma\right)^{\frac{1}{1+\gamma}} - s \right]_+^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \quad \forall i \le j \quad \forall s > 0, \tag{3.3}$$

де

$$a_1 = (1-\lambda)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \right)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}}, \quad a_2 = (1+\gamma)\gamma^{-1}(1-\lambda)^{-\frac{1}{1+\gamma}}, \quad f(s)_+ = max(0, f(s)).$$

Зокрема, справедливими є наступні оцінки для носіїв функцій $U_i(s)$:

$$supp\ U_i \in [0, b_i], \quad b_i = a_2(kK_i^\gamma)^{\frac{1}{1+\gamma}}. \tag{3.4}$$

Доведення. Вказанні вище функції $M_i(s)$ є, як не складно перевірити, розв'язками наступних допоміжних задач Коші:

$$M_i(s) = \lambda M_i(s) + k(-M_i')^{1+\gamma} \quad \forall s > 0, \tag{3.5}$$

$$M_i(0) = K_i \quad \forall i \le j. \tag{3.6}$$

Доведемо тепер оцінку (3.3) за індукцією. При i=1 ця оцінка перевіряється безпосередньо. Нехай (3.3) вже доведено для усіх $i \leq j-1$, тобто

$$0 \leq U_i(s) \leq M_i(s), \quad i = 1, 2, ..., j-1, \tag{3.7}$$

і доведемо тепер, що

$$U_i(s) \leq M_i(s) \quad \forall s > 0, \tag{3.8}$$

Доведемо (3.8) від супротивного, тобто припустимо, що (3.8) не має місця. Тоді знайдеться інтервал (s_1, s_2) такий, що:

$$U_j(s) > M_j(s) > 0 \quad \forall s \in (s_1, s_2), \quad U_j(s_i) \equiv M_j(s_i). \tag{3.9}$$

Із означення функцій $M_i(s)$ і припущення індукції 3.7 слідує, що

$$M_j(s) \geq M_{j-1}(s) \geq U_{j-1}(s) \quad \forall s > 0.$$

В силу цієї нерівності і припущення (3.9) виконується співвідношення:

$$U_j(s) \geq U_{j-1}(s) \quad \forall s \in (s_1, s_2).$$

Це означає, що $U_j(s)$ є розв'язком наступної задачі:

$$U_j(s) \leq \lambda U_j(s) + k(-U_j'(s))^{1+\gamma} \quad \forall s \in (s_1, s_2) \tag{3.10}$$

$$U_j(s_1) = M_j(s_1).$$

Інтегруємо нерівність (3.10) та приходимо до оцінки:

$$U_j(s) \leq M_j(s) \quad \forall s \in (s_1, s_2)$$

що і суперечить нашому припущенню (3.9). Таким чином, теорему доведено. □

Теорема 3.2. *Нехай деяке сімейство неперервно диференційованих незростаючих на інтервалі* $[0, \infty)$ *функцій* $\{U_i(s)\}, \quad i = 1, 2, ...,$ *задовольняє наступній диференційній системі:*

$$U_i(s) \leq a + \lambda U_{i-1}(s) + k_i(-U_i'(s))^{1+\gamma}\, \forall s > 0,\ i = 2, 3, ..; U_1(s) \leq a + k_1(-U_1'(s))^{1+\gamma} \tag{3.11}$$

$$U_i(0) \leq K_i, \quad 0 < \lambda < 1, \quad a = const < \infty, \quad \gamma > 0, \tag{3.12}$$

де $\{k_i\}$ *- монотонно спадна послідовність,* $\{K_i\}$ *- монотонно зростаюча послідовність,* $k_i \to 0, K_i \to \infty$ *при* $i \to \infty$*, причому*

$$k_i K_i^{\gamma} \to 0 \quad \textit{монотонно при} \quad i \to \infty \tag{3.13}$$

Тоді існує неперервно незростаюча на інтервалі $(0, \infty)$ *функція* $U_0(s)$ *така, що* $U_0(s) \to \infty$ *при* $s \to 0$ *і для всього сімейства* $\{U_i(s)\}$ *виконується рівномірна апріорна оцінка:*

$$U_i(s) \leq U_0(s) \quad i = 1, 2, ..., \quad \forall s > 0 \tag{3.14}$$

Доведення. Знову запишемо послідовність допоміжних задач Коші:

$$(1 - \lambda) M_i(s) = a + k_i(-M_i'(s))^{1+\gamma} \quad \forall s > 0 \tag{3.15}$$

$$M_i(0) = K_i, \quad i = 1, 2, ... \tag{3.16}$$

Легко перевірити, що розв'язками цих задач є функції:

$M_i(s) = \dfrac{a}{1-\lambda} + a_1 k_i^{-\frac{1}{\gamma}} \left[a_2 \left(k_i \left(K_i - \dfrac{a}{1-\lambda} \right)^{\gamma} \right)^{\frac{1}{1+\gamma}} - s \right]^{\frac{1+\gamma}{\gamma}}$, $i \in N$, де a_1 і a_2 - із (3.3). Послідовність $\{M_i(s)\}$ не є монотонною послідовністю, але в силу умов монотонності на послідовності $\{k_i\}, \{K_i\}, \{k_i K_i^{\gamma}\}$ має наступну важливу для нас властивість: існує строго монотонно спадна послідовність $\{s_i\}$ така, що $s_i \to 0$ при $i \to \infty$, а також

$$M_{i+1}(s_i) = M_i(s_i), \quad i = 1, 2, ..., \tag{3.17}$$

$$M_{i+1}(s) > M_i(s), \quad \forall s, \quad 0 < s < s_i \tag{3.18}$$

$$M_{i+1}(s) \leq M_i(s), \quad \forall s, \quad s_i < s < \infty \tag{3.19}$$

За цією послідовністю $\{s_i\}$ визначаємо функцію:

$$U_0(s) = M_i(s), \quad s \in [s_i, s_{i-1}], \quad i = 1, 2, 3, ...,; \quad s_0 = +\infty \tag{3.20}$$

Доведемо, що ця функція є шуканою, тобто виконується апріорна оцінка (3.14). Очевидною є нерівність:

$$M_i(s) \le U_0(s) \quad \forall s > 0, \quad \forall i \in N. \tag{3.21}$$

Введемо монотонне сімейство незростаючих функцій:

$$U_0^{(i)}(s) = \begin{cases} M_i(s_i) & \text{при } s \in [0, s_{i-1}] \\ M_j(s) & \text{при } s \in [s_j, s_{j-1}], \forall j \le i-1 \end{cases}$$

Очевидно, що

$$U_0^{(i)} = U_0(s) \quad \forall s \ge s_i, \quad U_0^{(i)} < U_0(s), \quad \forall s < s_1, \forall i \in N \tag{3.22}$$

Ми будемо доводити нерівність:

$$U_i(s) \le U_0^{(i)}(s) \quad \forall i \in N, \quad \forall s \in (0, \infty) \tag{3.23}$$

яка в силу співвідношення (3.22) призведе до потрібної апріорної оцінки (3.14). При $i = 1$ нерівність (3.23) очевидна. Нехай ця нерівність виконується для всіх $i \le j-1$. Доведемо, що вона виконується при $i = j$. Доведемо від супротивного. Нехай існує інтервал $\Delta = (v, \omega)$ такий, що

$$U_j(s) > U_0^{(j)}(s) \quad \forall s \in \Delta; \tag{3.24}$$

$$U_j(v) = U_0^{(j)}(v), \quad U_j(\omega) = U_0^{(j)}(\omega) \tag{3.25}$$

В силу (3.11) і (3.12) також маємо:

$$U_j(s) \le a + \lambda U_{j-1}(s) + k_j(-U_j'(s))^{1+\gamma} \quad \forall s \in (0, \infty); \quad U_j(0) \le K_j. \tag{3.26}$$

В силу (3.18) маємо:

$$U_0^{(j)}(s) = M_j(s) > M_{j-1}(s) \quad \forall s \in \Delta_{j-1} \equiv \Delta \cap (0, s_{j-1}) \tag{3.27}$$

За припущенням індукції також маємо:

$$U_{j-1}(s) \le M_{j-1}(s) \equiv U_0^{(j-1)}(s) \quad \forall s \in \Delta_{j-1} \tag{3.28}$$

Тепер в силу (3.24), (3.27), (3.28) отримуємо із співвідношення 3.26:

$$U_j(s) \leq a + \lambda U_j(s) + k_j(-U_j'(s))^{1+\gamma} \quad \forall s \in \Delta_j, \tag{3.29}$$

а в силу (3.25)

$$U_j(\upsilon) = U_0^{(j)}(\upsilon) = M_j(\upsilon). \tag{3.30}$$

Інтегруємо диференційну нерівність (3.29) , з урахуванням (3.30)

$$U_j(s) \leq M_j(s) = U_0^{(j)}(s) \quad \forall s \in \Delta_j,$$

звідки через припущення (3.24) слідує, що $\Delta \cap (0, s_{j-1}) = \varnothing$. Нехай тепер

$$\Delta_{j-2} = \Delta \cap [s_{j-1}, s_{j-2}) \neq \varnothing, \quad \upsilon \in [s_{j-1}, s_{j-2}). \tag{3.31}$$

за побудовою функції $U_0^{(j)}(s)$ маємо:

$$U_0^{(j)}(s) = M_{j-1}(s), \quad \forall s \in [s_{j-1}, s_{j-2}),$$

а за припущенням індукції слідує, що:

$$U_{j-1}(s) \leq U_0^{(j-1)}(s) = M_{j-1}(s) \quad \forall s \in [s_{j-1}, s_{j-2}).$$

Використуємо останнє співвідношення та виводимо із нерівності 3.24:

$$U_j(s) > U_{j-1}(s) = M_{j-1}(s) \quad \forall s \in \Delta_{j-2}$$

тому із 3.26 із урахуванням того, що $k_j \leq k_{j-1}$, маємо нерівність:

$$U_j(s) \leq a + \lambda U_j(s) + k_{j-1}(-U_j'(s))^{1+\gamma} \quad \forall s \in \Delta_{j-2}, \tag{3.32}$$

причому в силу (3.25) та (3.31)

$$U_j(\upsilon) = U_0^{(j)}(\upsilon) = M_{j-1}(\upsilon) \tag{3.33}$$

інтегруємо нерівність (3.32) з урахуванням (3.33) та отримуємо оцінку:

$$U_j(s) \leq M_{j-1}(s) = U_0^{(j)}(s) \quad \forall s \in \Delta_{j-2}.$$

З урахуванням припущення (3.24) попередня оцінка доводе, що $\Delta_{j-2} = \varnothing$. Продовжуємо таким же чином далі та встановлюємо, що

$$\Delta \cap [s_j, s_{j-1}) = \varnothing \quad \forall i \leq j-1.$$

$\square$

Висновки

В кваліфікаційній роботі проведено огляд дослідження сімейства неперервно диференційовних функцій, що не зростають на інтервалі і задовольняють системі диференціальних нерівностей. Поставлена на початку мета була реалізована, а саме: було доведенно існування апріорних оцінок для цих функцій. Доведені в роботі теореми мають важливе значення для математичних досліджень, в тому числі в теорії диференціальних рівнянь. Оцінки, які були отримані, можуть також бути використані в задачах математичної фізики та інших галузях, де необхідно вирішувати або аналізувати складні нелінійні диференціальні рівняння або системи нелінійних диференціальних рівнянь.

Список використаних джерел

[1] A. E. Shishkov, A. G. Shchelkov, Blow-up boundary regimes for general quasilinear parabolic equations in multidimensional domains, Sbornik: Mathematics, 1999, Volume 190, Issue 3, 447–479 .

[2] Diaz J. I., Veron L. Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasi-linear equations, Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 290 № 2. P. 787-814.

[3] Alt H. W., Luckhaus S. Quasilinear, Elliptic-parabolic differential equations, Math. Z. 1983. V. 183. P. 311-341.

[4] Benilan Ph., Wittbold P, On mild and weak solutions of elliptic-parabolic problems, Adv. Differential Equations. 1996. V. 1. №6. P. 1053-1073.